Correction du TD_5 de la mécanique des solides

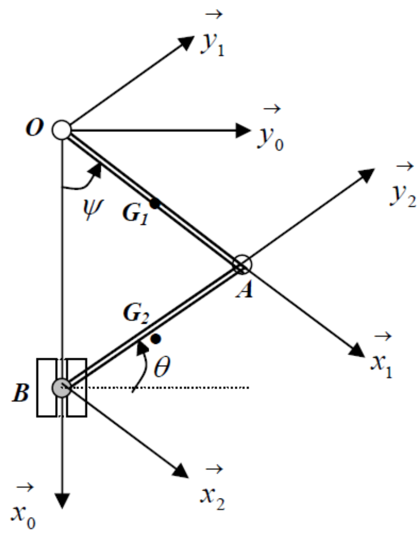
Exercice 1

On considère, dans le repère orthonormé $R_0(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$, le système mécanique constitué de deux barres homogènes ***(S1)*** lié au repère $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ et ***(S2)*** lié au repère $R_2(B,\vec{x}_2,\vec{y}_2,\vec{z}_2)$ Les barres ont une longueur ***OA=AB = L*** , de masse ***m***, articulées au point ***A*** . Au point ***B*** est articulée un solide ***(S₃)*** qui est une masse ***M*** coulissante suivant l'axe $\vec{x}_0$. Soit $\boldsymbol{G_1}$ et $\boldsymbol{G_2}$ les centres d'inertie, respectifs des deux barres. ***On prendra*** R_0 ***comme repère de projection***.
Les tenseurs d'inertie des deux barres en leurs centres d'inertie respectifs sont donnés par :

$$I_{G1}(S_1)=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&A&0\\0&0&A\end{bmatrix}_{R_1} \quad ; \quad I_{G2}(S_2)=\begin{bmatrix}A&0&0\\0&0&0\\0&0&A\end{bmatrix}_{R_2} \qquad \text{avec : } A=\frac{mL^2}{12}$$

Calculer en fonction de $(\psi,\dot{\psi},\ddot{\psi}$ et L :

1. Les vitesses et les accélérations absolues des points : $\boldsymbol{G_1}$ **,** $\boldsymbol{G_2}$ **, *B*.**
2. Le torseur cinétique du système au point ***O*** ;
3. Le torseur dynamique du système au point ***O*** ;
4. L'énergie cinétique du système.



Solution :

1. Vitesses et accélérations par dérivation :

1.a. Vitesses

Nous avons : $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\psi \quad \Rightarrow \quad \cos\theta=\sin\psi \quad$ et $\quad \sin\theta=\cos\psi$

$$\overrightarrow{OG_1}=\begin{cases}(L/2)\cos\psi\\(L/2)\sin\psi\\0\end{cases}_{R_0} \quad\Rightarrow\quad \vec{V}^0(G_1)=\frac{d^0\,\overrightarrow{OG_1}}{dt}=\begin{cases}-(L/2)\dot{\psi}\sin\psi\\(L/2)\dot{\psi}\cos\psi\\0\end{cases}_{R_0}$$

$$\overrightarrow{OG_2}=\begin{cases}L\cos\psi+(L/2)\cos\psi=(3L/2)\cos\psi\\L\sin\psi-(L/2)\sin\psi=(L/2)\cos\psi\\0\end{cases}_{R_0} \Rightarrow \vec{V}^0(G_2)=\frac{d^0\,\overrightarrow{OG_2}}{dt}=\begin{cases}-(3L/2)\dot{\psi}\sin\psi\\(L/2)\dot{\psi}\cos\psi\\0\end{cases}_{R_0}$$

$$\overrightarrow{OB} = \begin{cases} 2L\cos\psi \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_0} \qquad \Rightarrow \qquad \vec{V}^0(B) = \frac{d^0\overrightarrow{OB}}{dt} = \begin{cases} -2L\dot{\psi}\sin\psi \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_0}$$

1.b. Accélérations des points par dérivation :

$$\vec{\gamma}^0(G_1) = \frac{d^0\vec{V}^0(G_1)}{dt} = \begin{cases} -(L/2)(\ddot{\psi}\sin\psi + \dot{\psi}^2\cos\psi) \\ (L/2)(\ddot{\psi}\cos\psi - \dot{\psi}^2 s\sin\psi) \\ 0 \end{cases}_{R_0}$$

$$\vec{\gamma}^0(G_2) = \frac{d^0\vec{V}^0(G_2)}{dt} = \begin{cases} -(3L/2)(\ddot{\psi}\sin\psi + \dot{\psi}^2\cos\psi) \\ (L/2)(\ddot{\psi}\cos\psi - \dot{\psi}^2 s\sin\psi) \\ 0 \end{cases}_{R_0}$$

$$\vec{\gamma}^0(B) = \frac{d^0\vec{V}^0(B)}{dt} = \begin{cases} -2L(\ddot{\psi}\sin\psi + \dot{\psi}^2\cos\psi) \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_0}$$

2. Torseur cinétique du système au point O ;

Le torseur cinétique a pour éléments e réduction :

- la résultante qui est égale à la somme des quantités de mouvement de chaque solide ;

$$\vec{P}^0 = m\vec{V}^0(G_1) + m\vec{V}^0(G_2) + M\vec{V}^0(B) = \begin{cases} -2L\dot{\psi}\sin\psi(m+M) \\ Lm\dot{\psi}\cos\psi \\ 0 \end{cases}_{R_0}$$

- le moment cinétique total qui est égal à la somme des moments cinétiques des solides.

$$\vec{\sigma}^0(\sum/R_0) = \vec{\sigma}^0(S_1/R_0) + \vec{\sigma}^0(S_2/R_0) + \vec{\sigma}^0(S_3/R_0)$$

a) moment cinétique du solide (S_1) : $\vec{\sigma}^0(S_1/R_0) = I_{G1}.\vec{\Omega}_1^0 + \overrightarrow{OG_1} \wedge m\vec{V}^0(G_1)$

$$\vec{\sigma}^0(S_1/R_0)=\underset{R_1}{\begin{bmatrix}0&0&0\\0&A&0\\0&0&A\end{bmatrix}}\underset{R_1}{\begin{bmatrix}0\\0\\\dot{\psi}\end{bmatrix}}+\underset{R_0}{\begin{cases}(L/2)\cos\psi\\(L/2)\sin\psi\\0\end{cases}}\wedge\underset{R_0}{\begin{cases}-(L/2)\dot{\psi}\sin\psi\\(L/2)\dot{\psi}\cos\psi\\0\end{cases}}$$

$$\vec{\sigma}^0(S_1/R_0)=\underset{R_0}{\begin{cases}0\\0\\A\dot{\psi}+\dfrac{mL^2}{4}\dot{\psi}\end{cases}}=\underset{R_0}{\begin{cases}0\\0\\\dfrac{mL^2}{12}\dot{\psi}+\dfrac{mL^2}{4}\dot{\psi}\end{cases}}=\underset{R_0}{\begin{cases}0\\0\\\dfrac{mL^2}{3}\dot{\psi}\end{cases}}$$

b) *moment cinétique du solide* (S_2) $:\vec{\sigma}^0(S_2/R_0)=I_{G2}.\vec{\Omega}_2^0+\overrightarrow{OG_2}\wedge m\vec{V}^0(G_2)$

$$\vec{\sigma}^0(S_2/R_0)=\underset{R_1}{\begin{bmatrix}A&0&0\\0&0&0\\0&0&A\end{bmatrix}}\underset{R_1}{\begin{bmatrix}0\\0\\\dot{\theta}\end{bmatrix}}+\underset{R_0}{\begin{cases}(3L/2)\cos\psi\\(L/2)\sin\psi\\0\end{cases}}\wedge m\underset{R_0}{\begin{cases}-(3L/2)\dot{\psi}\sin\psi\\(L/2)\dot{\psi}\cos\psi\\0\end{cases}}$$

$$\vec{\sigma}^0(S_2/R_0)=\underset{R_0}{\begin{cases}0\\0\\A\dot{\theta}+\dfrac{mL^2}{4}\dot{\psi}\end{cases}}=\underset{R_0}{\begin{cases}0\\0\\\dfrac{mL^2}{12}\dot{\theta}+\dfrac{3mL^2}{4}\dot{\psi}\end{cases}}$$

or nous avons : $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\psi$ alors en dérivant nous avons : $\dot{\theta}=-\dot{\psi}$ en on obtient :

$$\vec{\sigma}^0(S_2/R_0)=\underset{R_0}{\begin{cases}0\\0\\\dfrac{2mL^2}{3}\dot{\psi}\end{cases}}$$

c) *moment cinétique du solide* (S_3) $:\vec{\sigma}^0(S_3/R_0)=\overrightarrow{OB}\wedge m\vec{V}^0(B)=\vec{0}$ car $\overrightarrow{OB}\ //\ \vec{V}^0(B)$

d) Moment cinétique du système :

$$\vec{\sigma}^0(\textstyle\sum/R_0)=\underset{R_0}{\begin{cases}0\\0\\\dfrac{mL^2}{3}\dot{\psi}\end{cases}}+\underset{R_0}{\begin{cases}0\\0\\\dfrac{2mL^2}{3}\dot{\psi}\end{cases}}=\underset{R_0}{\begin{cases}0\\0\\mL^2\dot{\psi}\end{cases}}$$

3. Torseur dynamique du système au point O

Les éléments du torseur dynamique sont :

- la résultante dynamique : $\vec{D} = m_1 \vec{\gamma}^0(G_1) + m_2 \vec{\gamma}^0(G_2) + m_3 \vec{\gamma}^0(G_3)$

$$\vec{D} = \begin{cases} -2L(m+M)(\ddot{\psi}\sin\psi + \dot{\psi}^2\cos\psi) \\ mL(\ddot{\psi}\cos\psi - \dot{\psi}^2 s\sin\psi) \\ 0 \end{cases}_{R_0}$$

- le moment dynamique du système : $\vec{\delta}^0(\sum / R_0) = \dfrac{d^0 \vec{\sigma}^0(\sum / R_0)}{dt} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ mL^2\ddot{\psi} \end{cases}_{R_0}$

4. Energie cinétique du système.

L'énergie cinétique du système est égale à la somme des énergies cinétique de chaque solide par rapport au même repère.

$$E_C^0(\sum / R_0) = E_C^0(S_1/R_0) + E_C^0(S_2/R_0) + E_C^0(S_3/R_0)$$

a) Energie cinétique du solide (S_1)

$$E_C^0(S_1/R_0) = \frac{1}{2}m\left(\vec{V}^0(G_1)\right)^2 + \frac{1}{2}\vec{\Omega}_1^{0T}.I_{G1}(S_1).\vec{\Omega}_1^0$$

$$E_C^0(S_1/R_0) = \frac{1}{2}m\left(\frac{L}{2}\right)^2\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}(0,0,\dot{\psi})\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \frac{1}{2}m\left(\frac{L}{2}\right)^2\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}A\dot{\psi}^2 = \frac{mL^2}{6}\dot{\psi}^2$$

b) Energie cinétique du solide (S_2)

$$E_C^0(S_2/R_0) = \frac{1}{2}m\left(\vec{V}^0(G_2)\right)^2 + \frac{1}{2}\vec{\Omega}_2^{0T}.I_{G2}(S_2).\vec{\Omega}_2^0$$

$$E_C^0(S_2/R_0) = \frac{1}{2}m\left(\frac{L}{2}\right)^2\left(9\sin^2\psi + \cos^2\psi\right)\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}(0,0,\dot{\theta})\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

$$E_C^0(S_2/R_0) = \frac{mL^2}{8}\left(1 + 8\sin^2\psi\right)\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 = \frac{mL^2}{8}\left(1 + 8\sin^2\psi\right)\dot{\psi}^2 + \frac{mL^2}{24}\dot{\psi}^2$$

$$E_C^0(S_2/R_0) = \frac{mL^2}{6}\dot{\psi}^2 + \dot{\psi}^2\sin^2\psi = mL^2\dot{\psi}^2\left(\frac{1}{6} + \sin^2\psi\right)$$

b) Energie cinétique du solide (S_3)

$$E_C^0(S_3/R_0)=\frac{1}{2}m\left(\vec{V}^0(B)\right)^2=2ML^2\dot{\psi}^2\sin^2\psi$$

d) Energie cinétique du système :

$$E_C^0(S_3/R_0)=\frac{mL^2}{6}\dot{\psi}^2+mL^2\dot{\psi}^2\left(\frac{1}{6}+\sin^2\psi\right)+2ML^2\dot{\psi}^2\sin^2\psi \;=\; \frac{mL^2}{3}\dot{\psi}^2+(m+2M)L^2\dot{\psi}^2\sin^2\psi$$

$$E_C^0(S_3/R_0)=\frac{mL^2}{3}\dot{\psi}^2+(m+2M)L^2\dot{\psi}^2\sin^2\psi$$

Exercice 2 :

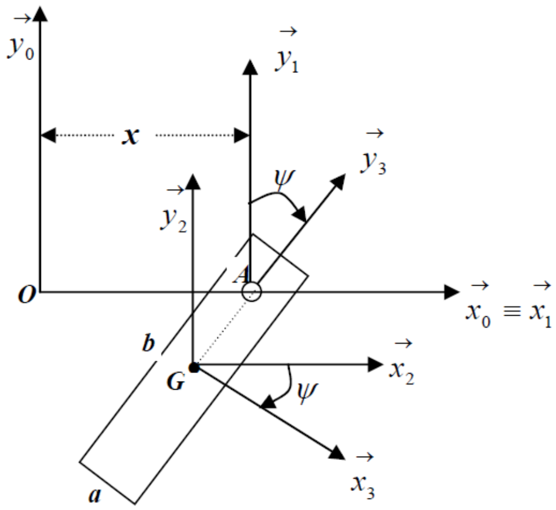
Soit une plaque homogène (S) rectangulaire de largeur ***2a***, de longueur ***2b*** et de centre de masse ***G***. Elle est rotation à une vitesse angulaire fixe autour de l'un des ses point ***A*** dans le plan $(\vec{x}_0,\vec{y}_0)$ tel que $\vec{z}_0\equiv\vec{z}_1\equiv\vec{z}_2\equiv\vec{z}_3$ et $(\vec{x}_1,\vec{x}_3)=(\vec{y}_1,\vec{y}_3)=\psi$. Le point ***A*** se déplace sur l'axe $(O,\vec{x}_0)$ tel que : $\overrightarrow{OA}=x\,\vec{x}_0$ et $\overrightarrow{GA}=\frac{b}{3}\vec{y}_3$. On prendra $R_1(O,\vec{x}_1,\vec{y}_1,\vec{z}_1)$ comme repère de projection. **Déterminer :**

1. La vitesse de rotation instantanée de la plaque par rapport au repère R_0 : $\vec{\Omega}_3^0$
2. Les vecteurs vitesse et accélération absolues du point ***G*** : $\vec{V}^0(G)$ et $\vec{\gamma}^0(G)$;
3. Le moment cinétique de la plaque au point ***A*** ;
4. Le moment dynamique de la plaque point ***A*** ;
5. L'énergie cinétique de la plaque.

On donne :

$$I_G=\begin{bmatrix}A&0&0\\0&A&0\\0&0&C\end{bmatrix}_{R_3}$$

$$A=\frac{mb^2}{12}\quad,\quad C=\frac{m^2}{12}(a+b^2)$$



Solution :

1. Vitesse de rotation instantanée de la plaque par rapport au repère R_0 : $\vec{\Omega}_3^0$

$$\vec{\Omega}_3^0 = \vec{\Omega}_3^2 + \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0 = -\dot{\psi}\,\vec{z}_1 \quad \text{avec } \dot{\psi} = Cte$$

2. Vitesse et accélération absolues du point *G* : $\vec{V}^0(G)$ **et** $\vec{\gamma}^0(G)$ **;**

2.1. Vitesse absolue du point *G* :

Par la cinématique du solide nous pouvons écrire : $\vec{V}^0(G) = \vec{V}^0(A) + \vec{\Omega}_3^0 \wedge \overrightarrow{AG}$

Nous avons : $\overrightarrow{OA} = \begin{cases} x \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_1}$, $\overrightarrow{AG} = -\dfrac{b}{3}\vec{y}_3 = -\dfrac{b}{3}\left(\cos\psi\,\vec{y}_1 + \sin\psi\,\vec{x}_1\right) = \begin{cases} -(b/3)\sin\psi \\ -(b/3)\cos\psi \\ 0 \end{cases}_{R_1}$

$$\vec{V}^0(G) = \begin{cases} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_1} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ -\dot{\psi} \end{cases}_{R_1} \wedge \begin{cases} -(b/3)\sin\psi \\ -(b/3)\cos\psi \\ 0 \end{cases}_{R_1} = \begin{cases} \dot{x} - (b/3)\dot{\psi}\cos\psi \\ (b/3)\dot{\psi}\sin\psi \\ 0 \end{cases}_{R_1}$$

2.2. Accélération absolue du point *G* :

Par dérivation nous pouvons écrire : $\vec{\gamma}^0(G) = \dfrac{d^0\vec{V}^0(G)}{dt} = \dfrac{d^1\vec{V}^0(G)}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^0(G)$

$$\vec{\gamma}^0(G) = \frac{d^1\vec{V}^0(G)}{dt} = \begin{cases} \ddot{x} - \dfrac{b}{3}\left(\ddot{\psi}\cos\psi - \dot{\psi}^2\sin\psi\right) \\ \dfrac{b}{3}\left(\ddot{\psi}\sin\psi + \dot{\psi}^2\cos\psi\right) \\ 0 \end{cases}_{R_1}$$

3. Moment cinétique de la plaque au point *A* ;

$$\vec{\sigma}_A(S/R_0) = I_G.\vec{\Omega}_3^0 + \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{V}^0(G)$$

$$\vec{\sigma}_A(S/R_0) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{R_3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\dot{\psi} \end{bmatrix} + m \begin{cases} -\dfrac{b}{3}\sin\psi \\ -\dfrac{b}{3}\cos\psi \\ 0 \end{cases}_{R_1} \wedge \begin{cases} \dot{x} - \dfrac{b}{3}\dot{\psi}\cos\psi \\ \dfrac{b}{3}\dot{\psi}\sin\psi \\ 0 \end{cases}_{R_1}$$

$$\vec{\sigma}_A(S/R_0)=\left[-C\dot{\psi}-m\frac{b^2}{9}\dot{\psi}\sin^2\psi+m\frac{b}{3}\cos\psi\left(\dot{x}-\frac{b}{3}\dot{\psi}\cos\psi\right)\right]\vec{z}_1$$

$$\vec{\sigma}_A(S/R_0)=\left[-C\dot{\psi}-m\frac{b^2}{9}\dot{\psi}+m\frac{b}{3}\dot{x}\cos\psi\right]\vec{z}_1$$

4. Moment dynamique de la plaque au point A ;

$$\vec{\delta}_A(S/R_0)=\frac{d^0\vec{\sigma}_A(S/R_0)}{dt}+\vec{V}^0(A)\wedge m\vec{V}^0(G)$$

$$\frac{d^0\vec{\sigma}_A(S/R_0)}{dt}=\frac{d^1\vec{\sigma}_A(S/R_0)}{dt}+\vec{\Omega}_1^0\wedge\vec{\sigma}_A(S/R_0)=\frac{d^1\vec{\sigma}_A(S/R_0)}{dt}\qquad \text{car}\quad \vec{\Omega}_1^0=\vec{0}$$

$$\frac{d^0\vec{\sigma}_A(S/R_0)}{dt}=\left[-C\ddot{\psi}-m\frac{b^2}{9}\ddot{\psi}+m\frac{b}{3}\ddot{x}\cos\psi-m\frac{b}{3}\dot{x}\dot{\psi}\sin\psi\right]\vec{z}_1$$

$$\vec{V}^0(A)\wedge m\vec{V}^0(G)=\underset{R_1}{\left\{\begin{array}{l}\dot{x}\\0\\0\end{array}\right.}\wedge\; m\underset{R_1}{\left\{\begin{array}{l}\dot{x}-(b/3)\dot{\psi}\cos\psi\\(b/3)\dot{\psi}\sin\psi\\0\end{array}\right.}=\underset{R_1}{\left\{\begin{array}{l}0\\0\\m\frac{b}{3}\dot{x}\dot{\psi}\sin\psi\end{array}\right.}$$

on déduit : $\vec{\delta}_A(S/R_0)=\left[-C\ddot{\psi}-m\frac{b^2}{9}\ddot{\psi}+m\frac{b}{3}\ddot{x}\cos\psi\right]\vec{z}_1$

3. *Energie cinétique de la plaque* (S)

$$E_C^0(S/R_0)=\frac{1}{2}m\left(\vec{V}^0(G)\right)^2+\frac{1}{2}\vec{\Omega}_3^{0\,T}.I_G(S).\vec{\Omega}_3^0$$

$$E_C^0(S_1/R_0)=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}-\frac{b}{3}\dot{\psi}\cos\psi\right)^2+\frac{1}{2}m\left(\frac{b}{3}\dot{\psi}\sin\psi\right)^2+\frac{1}{2}(0,0,-\dot{\psi})\begin{bmatrix}A&0&0\\0&A&0\\0&0&C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\-\dot{\psi}\end{bmatrix}$$

$$E_C^0(S_1/R_0)=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2+\frac{b^2}{9}\dot{\psi}^2-\frac{2b}{3}\dot{x}\dot{\psi}\cos\psi\right)+\frac{1}{2}C\dot{\psi}^2$$

Exercice 3 :

Soit un système constitué d'une tige filetée ***OA*** lié au repère $R_1(O, x_1, y_1, z_1)$. La tige de masse négligeable tourne autour de l'axe $\vec{z}_0 \equiv \vec{z}_1$ avec une vitesse de rotation $\dot{\alpha} = Cte$.

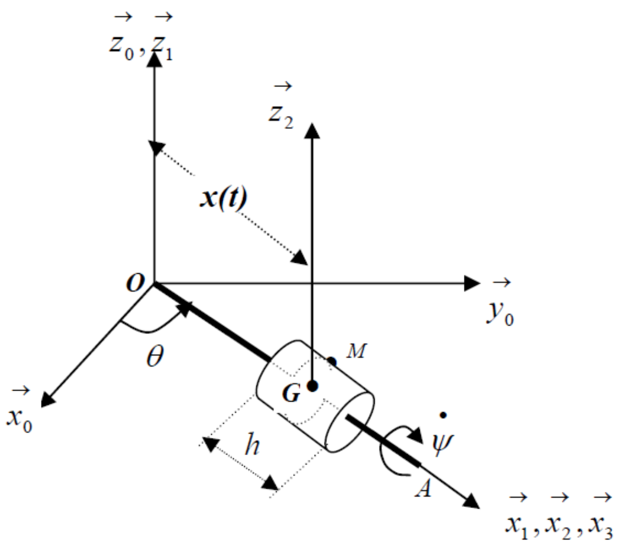
Un cylindre de masse ***m***, de hauteur ***h*** et de centre d'inertie ***G***, lié au repère $R_3(G, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ s'enroule autour de cette tige et il a deux mouvements:

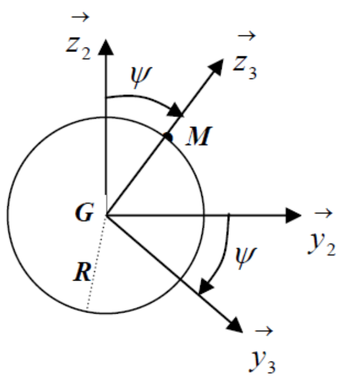
- L'un, de translation de son centre d'inertie ***G***, lié au repère $R_2(G, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$, suivant l'axe de la tige $\vec{x}_1 \equiv \vec{x}_2$ avec une vitesse linéaire $\dot{x}(t)$;
- L'autre, de rotation autour de l'axe $\vec{x}_2$ avec une vitesse de rotation $\dot{\psi} = Cte$ et tel que $(\vec{y}_2, \vec{y}_3) = (\vec{z}_2, \vec{z}_3) = \psi$

On prendra R_2 comme repère relatif et repère aussi de projection.

Déterminer :

1. Le tenseur d'inertie du cylindre au point G par rapport aux repères R_3 et R_2 ;
2. La vitesse de rotation instantanée du cylindre par rapport au repère R_0 ;
3. La vitesse et l'accélération du point M par composition de mouvement ;
4. Les torseurs, cinétique et dynamique, au point O par rapport au repère R_0 ;
5. L'énergie cinétique du système.





Solution :

1. Tenseur d'inertie du cylindre au point G par rapport aux repères R_3 et R_2 ;

Le tenseur d'inertie du cylindre dans le repère R_2 est donné par :

$$I_G = \begin{bmatrix} \frac{mR^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mR^2}{4}+\frac{mh^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mR^2}{4}+\frac{mh^2}{12} \end{bmatrix}_{R_3} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & & B \end{bmatrix} \quad \text{où } A=\frac{mR^2}{2} \; ; \; B=\frac{mR^2}{4}+\frac{mh^2}{12}$$

2. Vitesse de rotation instantanée du cylindre par rapport au repère R_0 ;

Le repère R_2 est en translation par rapport au repère R_1 alors : $\vec{\Omega}_2^1 = \vec{0}$

$$\vec{\Omega}_3^0 = \vec{\Omega}_3^2 + \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0 = \dot{\alpha}\,\vec{z}_2 - \dot{\psi}\,\vec{x}_2 = \begin{cases} -\dot{\psi} \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{cases}_{R_2}$$

3. Vitesse et l'accélération du point M par composition de mouvement :

3.1. Vitesse :

Nous avons : $\overrightarrow{OG} = \begin{cases} x \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_2}$; $\overrightarrow{GM} = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ R \end{cases}_{R_3} = \begin{cases} 0 \\ R\sin\psi \\ R\cos\psi \end{cases}_{R_2}$

La vitesse absolue est égale à la vitesse relative plus la vitesse d'entraînement.

$$\vec{V}^0(M) = \vec{V}^2(M) + \vec{V}_2^0(M)$$

$$\vec{V}^2(M) = \frac{d^2\,\overrightarrow{GM}}{dt} = \begin{cases} 0 \\ R\dot{\psi}\cos\psi \\ -R\dot{\psi}\sin\psi \end{cases}_{R_2} \quad \text{et} \quad \vec{V}_2^0(M) = \vec{V}^0(G) + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \overrightarrow{GM}$$

$$\vec{V}^0(G)=\frac{d^0\overrightarrow{OG}}{dt}=\frac{d^2\overrightarrow{OG}}{dt}+\vec{\Omega}_2^0\wedge\overrightarrow{OG}=\underset{R_2}{\begin{cases}\dot{x}\\0+\\0\end{cases}}\underset{R_2}{\begin{cases}0\\0\wedge\\\dot{\alpha}\end{cases}}\underset{R_2}{\begin{cases}x\\0=\\0\end{cases}}\underset{R_2}{\begin{cases}\dot{x}\\x\dot{\alpha}\\0\end{cases}}$$

$$\vec{\Omega}_2^0\wedge\overrightarrow{GM}=\underset{R_2}{\begin{cases}0\\0\ \wedge\\\dot{\alpha}\end{cases}}\underset{R_2}{\begin{cases}0\\R\sin\psi\ =\\R\cos\psi\end{cases}}\underset{R_2}{\begin{cases}-R\dot{\alpha}\sin\psi\\0\\0\end{cases}}$$

En faisant la somme des termes on obtient :

$$\vec{V}^0(M)=\underset{R_2}{\begin{cases}\dot{x}-R\dot{\alpha}\sin\psi\\x\dot{\alpha}+R\dot{\psi}\cos\psi\\-R\dot{\psi}\sin\psi\end{cases}}$$

3.2. Accélération :

L'expression de l'accélération absolue par composition de mouvement s'écrit :

$$\vec{\gamma}^0(M)=\vec{\gamma}^2(M)+\vec{\gamma}_2^0(M)+\vec{\gamma}_C(M)$$

$$\vec{\gamma}^2(M)=\frac{d^2\vec{V}^2(M)}{dt}=\underset{R_2}{\begin{cases}0\\-R\dot{\psi}^2\sin\psi\\-R\dot{\psi}^2\cos\psi\end{cases}}$$

$$\vec{\gamma}_2^0(M)=\vec{\gamma}_2^0(G)+\frac{d^0\vec{\Omega}_2^0}{dt}\wedge\overrightarrow{GM}+\vec{\Omega}_2^0\wedge\vec{\Omega}_2^0\wedge\overrightarrow{GM}\quad;\quad\text{avec}\ :\ \frac{d^0\vec{\Omega}_2^0}{dt}=\vec{0}$$

$$\vec{\gamma}_2^0(G)=\frac{d^0\vec{V}^0(G)}{dt}=\frac{d^2\vec{V}^0(G)}{dt}+\vec{\Omega}_2^0\wedge\vec{V}^0(G)=\underset{R_2}{\begin{cases}\ddot{x}\\\dot{x}\dot{\alpha}\ +\\0\end{cases}}\underset{R_2}{\begin{cases}0\\0\wedge\\\dot{\alpha}\end{cases}}\underset{R_2}{\begin{cases}\dot{x}\\x\dot{\alpha}=\\0\end{cases}}\underset{R_2}{\begin{cases}\ddot{x}-x\dot{\alpha}^2\\2\dot{x}\dot{\alpha}\\0\end{cases}}$$

$$\vec{\Omega}_2^0\wedge\vec{\Omega}_2^0\wedge\overrightarrow{GM}=\underset{R_2}{\begin{cases}0\\0\wedge\\\dot{\alpha}\end{cases}}\underset{R_2}{\begin{cases}0\\0\wedge\\\dot{\alpha}\end{cases}}\underset{R_2}{\begin{cases}0\\R\sin\psi=\\R\cos\psi\end{cases}}\underset{R_2}{\begin{cases}0\\-R\dot{\alpha}^2\sin\psi\\0\end{cases}}$$

$$\vec{\gamma}_C(M) = 2\left(\vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{V}^2(M)\right) = 2 \underset{R_2}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{cases}} \wedge \underset{R_2}{\begin{cases} 0 \\ R\dot{\psi}\cos\psi \\ -R\dot{\psi}\sin\psi \end{cases}} = \underset{R_2}{\begin{cases} -2R\dot{\psi}\dot{\alpha}\cos\psi \\ 0 \\ 0 \end{cases}}$$

$$\vec{\gamma}^0(M) = \underset{R_2}{\begin{cases} 0 \\ -R\dot{\psi}^2\sin\psi \\ -R\dot{\psi}^2\cos\psi \end{cases}} + \underset{R_2}{\begin{cases} \ddot{x} - x\dot{\alpha}^2 \\ 2\dot{x}\dot{\alpha} \\ 0 \end{cases}} + \underset{R_2}{\begin{cases} 0 \\ -R\dot{\alpha}^2\sin\psi \\ 0 \end{cases}} + \underset{R_2}{\begin{cases} -2R\dot{\psi}\dot{\alpha}\cos\psi \\ 0 \\ 0 \end{cases}}$$

$$\vec{\gamma}^0(M) = \underset{R_2}{\begin{cases} \ddot{x} - x\dot{\alpha}^2 - 2R\dot{\psi}\dot{\alpha}\cos\psi \\ 2\dot{x}\dot{\alpha} - R\dot{\alpha}^2\sin\psi - R\dot{\psi}^2\sin\psi \\ -R\dot{\psi}^2\cos\psi \end{cases}}$$

4. Torseurs, cinétique et dynamique, au point O par rapport au repère R_0 ;

4.1. Torseur cinétique

Les deux éléments de réduction du torseur cinétique sont :

- la résultante cinétique : $\vec{P} = m\vec{V}^0(G) = \underset{R_2}{\begin{cases} m\dot{x} \\ mx\dot{\alpha} \\ 0 \end{cases}}$;

- le moment cinétique : $\vec{\sigma}^0(S/R_0) = I_G.\vec{\Omega}_3^0 + \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{V}^0(G)$

$$\vec{\sigma}^0(S/R_0) = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dot{\psi} \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{cases} x \\ 0 \\ 0 \end{cases} \wedge \underset{R_2}{\begin{cases} m\dot{x} \\ mx\dot{\alpha} \\ 0 \end{cases}} = \underset{R_2}{\begin{cases} -A\dot{\psi} \\ 0 \\ B\dot{\alpha} + mx^2\dot{\alpha} \end{cases}}$$

$$\vec{\sigma}^0(S/R_0) = \underset{R_2}{\begin{cases} -\dfrac{mR^2}{2}\dot{\psi} \\ 0 \\ \left(\dfrac{mR^2}{4} + \dfrac{mh^2}{3} + mx^2\right)\dot{\alpha} \end{cases}}$$

4.2. Torseur dynamique

Les deux éléments de réduction du torseur dynamique sont :

- la résultante dynamique : $\vec{D} = m\vec{\gamma}^0(G) = \begin{cases} m(\ddot{x} - x\dot{\alpha}^2) \\ 2m\dot{x}\dot{\alpha} \\ 0 \end{cases}_{R_2}$;

- le moment dynamique : : $\vec{\delta}^0(S/R_0) = \dfrac{d^0\vec{\sigma}^0(S/R_0)}{dt} + \vec{V}^0(O) \wedge m\vec{V}^0(G)$ or $\vec{V}^0(O) = \vec{0}$

d'où : $\vec{\delta}^0(S/R_0) = \dfrac{d^0\vec{\sigma}^0(S/R_0)}{dt} = \dfrac{d^2\vec{\sigma}^0(S/R_0)}{dt} + \vec{\Omega}_2^0 \wedge \vec{\sigma}^0(S/R_0)$

$$\vec{\delta}^0(S/R_0) = \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 2mx\dot{x}\dot{\alpha} \end{cases}_{R_2} + \begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{cases}_{R_2} \wedge \begin{cases} -\dfrac{mR^2}{2}\dot{\psi} \\ 0 \\ \left(\dfrac{mR^2}{4} + \dfrac{mh^2}{3} + mx^2\right)\dot{\alpha} \end{cases}_{R_2}$$

$$\vec{\delta}^0(S/R_0) = \begin{cases} 0 \\ -\dfrac{mR^2}{2}\dot{\psi}\dot{\alpha} \\ 2mx\dot{x}\dot{\alpha} \end{cases}_{R_2}$$

5. Energie cinétique du système.

$$E_C = \frac{1}{2}\vec{\Omega}_3^0 . I_G . \vec{\Omega}_3^0 + \frac{1}{2}m\left(\vec{V}^0(G)\right)^2 = \frac{1}{2}(-\dot{\psi}, 0, \dot{\alpha})\begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & B \end{bmatrix}_{R_2}\begin{pmatrix} -\dot{\psi} \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + x^2\dot{\alpha}^2\right)$$

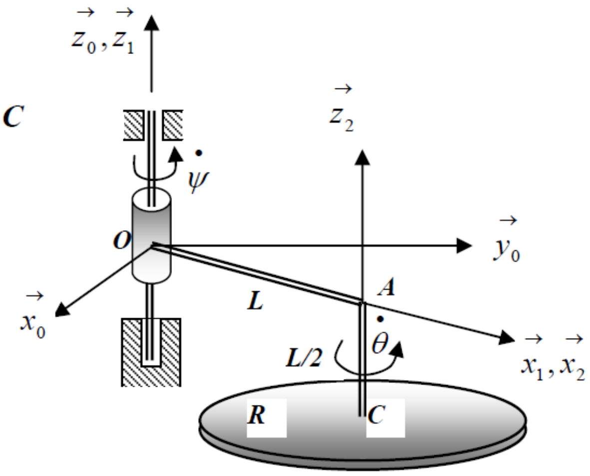
$$E_C = \frac{1}{2}A\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}B\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + x^2\dot{\alpha}^2\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{mR^2}{2}\dot{\psi}^2 + \left(\frac{mR^2}{4} + \frac{mh^2}{3}\right)\dot{\alpha}^2 + m\left(\dot{x}^2 + x^2\dot{\alpha}^2\right)\right]$$

<u>Exercice 4 :</u>

Une machine de ponçage des sols est composée d'un bras ***OAC*** de masse négligeable tel que ***OA=L***, ***AC=L/2*** et d'un disque de rayon ***R*** et de masse ***M*** . Le bras est en mouvement de rotation par rapport au bâti fixe avec une vitesse de rotation $\dot{\psi} = Cte$. Le disque tourne autour du bras ***AC*** avec une vitesse de rotation $\dot{\theta} = Cte$ On prendra R_1 comme repère de projection.

Déterminer :

1. Vitesse de rotation instantanée du disque
2. Vitesse et accélération absolues du point ***C***
3. Le torseur cinétique du disque en ***O*** ;
4. Le torseur dynamique du disque en ***O*** ;
5. L'énergie cinétique du système.



Solution :

1. Vitesse de rotation instantanée du disque par rapport au repère R_0 :

$$\vec{\Omega}_2^0 = \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0 = \dot{\psi}\,\vec{z}_2 + \dot{\theta}\,\vec{x}_2 = \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} + \dot{\theta} \end{cases}} \qquad \text{où} \qquad \dot{\psi} + \dot{\theta} = Cte$$

2. Vitesse et accélération du point *C* :

2.1. Vitesse :

Nous avons : $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \underset{R_1}{\begin{cases} L \\ 0 \\ -L/2 \end{cases}}$; $\vec{V}^0(O) = \vec{0}$

$$\vec{V}^0(C) = \vec{V}^0(O) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{OC} \quad \Rightarrow \quad \vec{V}^0(C) = \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{cases}} \wedge \underset{R_1}{\begin{cases} L \\ 0 \\ L/2 \end{cases}} = \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ L\dot{\psi} \\ 0 \end{cases}}$$

2.2. Accélération:

$$\vec{\gamma}^0(C) = \frac{d^0 \vec{V}^0(C)}{dt} = \frac{d^1 \vec{V}^0(C)}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^0(C) \quad \text{avec} \quad \frac{d^1 \vec{V}^0(C)}{dt} = \vec{0}$$

$$\vec{\gamma}^0(C) = \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{cases}} \wedge \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ L\dot{\psi} \\ 0 \end{cases}} = \underset{R_1}{\begin{cases} -L\dot{\psi}^2 \\ 0 \\ 0 \end{cases}}$$

3. Le torseur cinétique du disque au point *O* :

Les deux éléments de réduction du torseur cinétique sont :

- la résultante cinétique : $\vec{P}^0 = m\vec{V}^0(C) = \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ ML\dot{\psi} \\ 0 \end{cases}}$

- le moment cinétique : $\vec{\sigma}^0(S/R_0) = I_C . \vec{\Omega}_2^0 \; + \; \overrightarrow{OC} \wedge M\vec{V}^0(C)$

$$\vec{\sigma}^0(S/R_0) = \underset{R_2}{\begin{bmatrix} MR^2/4 & 0 & 0 \\ 0 & MR^2/4 & 0 \\ 0 & 0 & MR^2/2 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi}+\dot{\theta} \end{bmatrix} + \underset{R_1}{\begin{cases} L \\ 0 \\ L/2 \end{cases}} \wedge \underset{R_1}{\begin{cases} 0 \\ ML\dot{\psi} \\ 0 \end{cases}}$$

$$\vec{\sigma}^0(S/R_0) = \underset{R_1}{\begin{cases} -\dfrac{ML^2}{2}\dot{\psi} \\ 0 \\ \dfrac{MR^2}{2}(\dot{\psi}+\dot{\theta}) + ML^2\dot{\psi} \end{cases}}$$

4. Le torseur dynamique du disque au points *O* :

Les deux éléments de réduction du torseur dynamique sont :

- la résultante cinétique : $\vec{D} = m\vec{\gamma}^0(C) = \underset{R_1}{\begin{cases} -ML\dot{\psi}^2 \\ 0 \\ 0 \end{cases}}$;

- le moment dynamique : $\vec{\delta}^0(S/R_0) = \dfrac{d^0 \vec{\sigma}^0(S/R_0)}{dt} = \dfrac{d^1 \vec{\sigma}^0(S/R_0)}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{\sigma}^0(S/R_0)$

$$\frac{d^1 \vec{\sigma}^0(S/R_0)}{dt} = \vec{0}$$

$$\vec{\delta}^0(S/R_0) = \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{\sigma}^0(S/R_0) = {}_{R_1}\begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{cases} \wedge {}_{R_1}\begin{cases} -\dfrac{ML^2}{2}\dot{\psi} \\ 0 \\ \dfrac{MR^2}{2}(\dot{\psi}+\dot{\theta}) + ML^2\dot{\psi} \end{cases} = {}_{R_1}\begin{cases} 0 \\ -\dfrac{ML^2}{2}\dot{\psi}^2 \\ 0 \end{cases}$$

5. Energie cinétique du système.

$$E_C = \frac{1}{2}\vec{\Omega}_2^0 . I_G . \vec{\Omega}_2^0 + \frac{1}{2}M\left(\vec{V}^0(C)\right)^2$$

$$E_C = \frac{1}{2}\left(\dot{\psi}+\dot{\theta},\ 0,\ 0\right)\begin{bmatrix} MR^2/4 & 0 & 0 \\ 0 & MR^2/4 & 0 \\ 0 & 0 & MR^2/2 \end{bmatrix}_{R_2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi}+\dot{\theta} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}ML^2\dot{\psi}^2$$

$$\underline{E_C = \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\left(\dot{\psi}+\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}ML^2\dot{\psi}^2}$$